Ejercicios Teoría Cuántica de Campos. Capítulo 82

Autor del curso: Javier García

Problemas resueltos por: Roger Balsach

18 de agosto de 2022

1. Demostrar la ecuación

$$\begin{aligned}&\langle 0|T\left\{a_{\text{out}}\left(\vec{k}_c\right)a_{\text{out}}\left(\vec{k}_d\right)a^\dagger_{\text{in}}\left(\vec{k}_a\right)a^\dagger_{\text{in}}\left(\vec{k}_b\right)\right\}|0\rangle = \\ &\qquad\langle 0|T\left\{\left(a_{\text{out}}\left(\vec{k}_c\right)-a_{\text{in}}\left(\vec{k}_c\right)\right)\left(a_{\text{out}}\left(\vec{k}_d\right)-a_{\text{in}}\left(\vec{k}_d\right)\right)\left(a^\dagger_{\text{in}}\left(\vec{k}_a\right)-a^\dagger_{\text{out}}\left(\vec{k}_a\right)\right)\left(a^\dagger_{\text{in}}\left(\vec{k}_b\right)-a^\dagger_{\text{out}}\left(\vec{k}_b\right)\right)\right\}|0\rangle\end{aligned}$$

Donde los operadores $a^\dagger_{\text{in}}\left(\vec{k}\right)$ y $a^\dagger_{\text{out}}\left(\vec{k}\right)$ son dos operadores de creación, el primero crea partículas con cuadrimomento k en el espacio de estados iniciales, mientras que el segundo crea partículas con cuadrimomento k en el espacio de estados finales.
El orden temporal de operadores creación/aniquilación no está definido, pero siguiendo la notación de Javier vamos a asumir las siguientes propiedades;

- El orden temporal cambia el orden de los operadores de forma que $a_{\text{in}}\left(\vec{k}\right)$ esté siempre a la derecha de $a_{\text{out}}\left(\vec{k}\right)$.
- El orden temporal de dos operadores $a_{\text{in}}\left(\vec{k}\right)$ o dos operadores $a_{\text{out}}\left(\vec{k}\right)$ no está bien definido en caso de que los dos operadores tengan el mismo cuadrimomento, por lo que vamos a asumir que todos los cuadrimomentos son distintos y, por lo tanto, según la ecuación 66.4;

$$\left[a_{\text{in}}\left(\vec{k}_1\right), a^\dagger_{\text{in}}\left(\vec{k}_2\right)\right] = 0, \qquad \left[a_{\text{out}}\left(\vec{k}_1\right), a^\dagger_{\text{out}}\left(\vec{k}_2\right)\right] = 0 \tag{1}$$

- Finalmente, vamos a asumir que el orden temporal aplicado a operadores de creación/aniquilación es una operación lineal.

Definiendo el operador $A_i = a_{\text{out}}\left(\vec{k}_i\right) - a_{\text{in}}\left(\vec{k}_i\right)$ podemos reescribir la ecuación como

$$(-1)^2\langle 0|T\left\{A_cA_dA^\dagger_aA^\dagger_b\right\}|0\rangle = \langle 0|T\left\{a_{\text{out}}\left(\vec{k}_c\right)a_{\text{out}}\left(\vec{k}_d\right)a^\dagger_{\text{in}}\left(\vec{k}_a\right)a^\dagger_{\text{in}}\left(\vec{k}_b\right)\right\}|0\rangle$$

En general, podemos considerar el producto

$$\langle 0|T\left\{A_{i_1}\cdots A_{i_n}A^\dagger_{j_1}\cdots A^\dagger_{j_m}\right\}|0\rangle$$

Según la tercera propiedad, podemos expandir el producto, de forma que sólo tenemos que estudiar los productos de la forma $A_{i_1}\cdots A_{i_n}A^\dagger_{j_1}\cdots A^\dagger_{j_m}$ donde sustituimos el operador A_i por $-a_{\text{in}}\left(\vec{k}_i\right)$ o $a_{\text{out}}\left(\vec{k}_i\right)$. Por lo tanto, tenemos un producto de $n+m$ operadores $a_{\text{out}}\left(\vec{k}\right)$, $a_{\text{in}}\left(\vec{k}\right)$, $a^\dagger_{\text{out}}\left(\vec{k}\right)$, $a^\dagger_{\text{in}}\left(\vec{k}\right)$. Pero resulta que todos esos productos, excepto uno son cero.

Debido a la propiedad 1, todos los operadores *in* va a estar a la derecha de los operadores *out*, pero debido a la propiedad 2, si cualquiera de los operadores *in* es un operador aniquilación, entonces va a estar actuando directamente sobre el vacío y el resultado será cero debido a la ecuación 68.3;

$$a_{\text{in}}\left(\vec{k}\right)|0\rangle = 0$$

Por otra parte, si cualquiera de los operadores *out* fuera un operador creación, al estar actuando sobre el vacío desde la derecha, también va a dar cero ya que

$$\langle 0| \, a^\dagger_{\text{out}}\big(\vec{k}\big) = 0$$

En conclusión, todos los operadores creación tienen que ser operadores *in*, y todos los operadores aniquilación tienen que ser operadores *out*. Por lo que el único término que no se cancela es aquel en que sustituimos $A_i \to a_{\text{out}}\big(\vec{k}_i\big)$ y $A_j^\dagger \to -a^\dagger_{\text{in}}\big(\vec{k}_j\big)$. Dando el resultado esperado:

$$\langle 0|T\left\{A_{i_1}\cdots A_{i_n}A^\dagger_{j_1}\cdots A^\dagger_{j_m}\right\}|0\rangle = (-1)^m \langle 0|T\left\{a_{\text{out}}\big(\vec{k}_{i_1}\big)\cdots a_{\text{out}}\big(\vec{k}_{i_n}\big)\, a^\dagger_{\text{in}}\big(\vec{k}_{j_1}\big)\cdots a^\dagger_{\text{in}}\big(\vec{k}_{j_m}\big)\right\}|0\rangle$$

Siendo nuestro caso simplemente el caso particular $n = m = 2$.